Nome, Cognome, Matricola:

Tempo a disposizione: 90 minuti

ESERCIZI

1. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-y^2} - \cos(\alpha y) + \sin(2x^4)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date

(a) f è continua in $(0,0)$ per ogni α (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha = 2$ (c) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha^2 = 2$ (d) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ per ogni α (e) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ se e solo se $\alpha = 2$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha^2 = 2$.

Punteggio: 7

2. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ dato da

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt[3]{x} \leq y \leq 1\right\}.$$

Allora l'integrale doppio

$$I = \iint_A e^{y^2}\, dxdy$$

vale

$\boxed{\text{A}} : e - \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{B}} : e$ $\boxed{\text{C}} : \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{D}} : e - \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{E}} : \frac{2}{3}$

Punteggio: 6

3. Sia $\alpha > 0$. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{xn}{n^3 + x^\alpha}, \qquad x \in [0, +\infty),$$

stabilire quali delle seguenti affermazioni sono corrette giustificando le risposte date

(a) la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$ per ogni $\alpha > 0$ (b) la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$ (c) la serie converge totalmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha \geq 3$ (d) la serie converge totalmente in $[0,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 3$

Punteggio: 7

DOMANDE DI TEORIA

Domanda 1.

Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto limitato e connesso. Sia $\mathcal{S}$ una superficie di rappresentazione parametrica $\vec{r} : T \to \mathbb{R}^3$ regolare e semplice, tale che la sua frontiera Γ sia una curva semplice, chiusa, regolare a tratti. Sia Γ percorsa in modo da lasciare a sinistra il versore normale $\vec{n}$ di $\mathcal{S}$. Siano $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto tale che $\vec{r}(T) \subset A$ e $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^1(A)$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) Se $\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{S} = 0$ allora $\displaystyle\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\Gamma = 0$.

(b) Se $\vec{F}$ è conservativo in A allora $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ in A.

(c) Se $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ è tale che $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \equiv 1$ in T, allora $area(\mathcal{S}) = area(T)$.

Punteggio: 6

Domanda 2. Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e siano $f_n\, , f\, , g\, :\, I \to \mathbb{R}$, per $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che f_n siano derivabili in I per ogni $n \in \mathbb{N}$, che la successione $\{f_n\}$ sia uniformemente convergente a f in I e che la successione $\{f_n'\}$ sia puntualmente convergente a g in I.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando le risposte date.

(a) f è continua in I

(b) f è derivabile in I e vale $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in I$

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$ per ogni intervallo $[a, b] \subset I$.

Punteggio: 6
